# تخمین ضریب پخش یون کلر در بتن: روش های ریاضی و عددی

**سید حامد اخوان حجازی، دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه علم و صنعت ایران** *
**محمد هادی افشار، استادیار دانشکده عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران** **
**محسن تدین، عضو هیات علمی دانشگاه بوعلی سینا و مدرس دانشگاه علم و صنعت ایران** ***
*پست الکترونیکی: shahejazi@yahoo.com
**پست الکترونیکی: mhafshar@iust.ac.ir
***پست الکترونیکی: tadayonmoh@yahoo.com

## چکیده

*یکی از مهمترین دلائل آسیب دیدگی سازه های بتن مسلح بویژه در مجاورت سواحل، خوردگی آرماتور است. ازجمله عواملی که باعث خوردگی آرماتور در بتن می گردد، نفوذ یون کلرید درون بتن می باشد. یکی از پارامترهایی که می تواند میزان انتشار یون کلرید را به درون بتن توصیف کند، ضریب انتشار یون کلرید می باشد که می توان این ضریب را از پروفیل کلر بدست آورد و با معلوم بودن این ضریب می توان پیش بینی نمود که پس از چه مدت غلظت یون کلرید در سطح بتن به آستانه بحرانی می رسد . سازوکار های نفوذ یون کلرید در بتن متعدد و پیچیده می باشد، رایج ترین مدل انتقال یون کلرید در بتن، مدل تجربی براساس سازوکار نفوذ در اثر گرادیان غلظت یا پخش می باشد؛ که قوانین فیک برآن حاکم می باشد. در این مقاله تخمین ضریب پخش یون کلرید در بتن در حالت گذرا که براساس قانون دوم فیک است را با دو روش پیشنهادی تفاضلهای محدود و سریهای مثلثاتی محاسبه و با روش های موجود برپایه توابع خطا، مقایسه می کنیم.*

**کلید واژه ها** : ضریب پخش، قوانین فیک، توابع خطا، سریهای مثلثاتی، تفاضلهای محدود،

## ۱. مقدمه

موضوع خوردگی یکی از مباحث بسیار مهم علمی، فنی و اقتصادی است که در دهه های اخیر توجه دانشمندان و محققان را به خود جلب نموده و مطالعات بسیار زیادی بر روی آن انجام گرفته است. خوردگی یکی از مهمترین عوامل آسیب دیدگی سازه های بتن آرمه- به ویژه در مجاورت سواحل- است. محصولات خوردگی دارای حجمی بیشتر از فولاد هستند و این انبساط حجم سبب ایجاد تنشی میگردد که به مراتب زیادتر از مقاومت کششی بتن است و در نتیجه بتن ترک خورده و متلاشی می شود. کاهش قطر میلگردها و ترک خوردگی بتن بر اثر خوردگی منجر به کاهش مقاومت و پایداری عضو سازه ای میگردد. از جمله عواملی که باعث خوردگی آماتور در بتن می گردد، نفوذ یون کلرید در بتن می باشد. یون کلرید لایه محافظ

آماتور در بتن را تخریب می نماید که این لایه به علت خاصیت قلیایی بتن، روی میلگرد تشکیل میگردد. در اثر این تخریب، فولاد برای خورده شدن در حضور اکسیژن و آب مهیا میگردد. منحنی غلظت یون کلرید در مقابل فاصله عمودی از سطح بتن، پروفیل کلرید نامیده میشود. پروفیل کلرید با زمان تغییر می کند زیرا با گذشت زمان یون کلرید بیشتری از محیط به درون بتن نفوذ می کند و همچنین یون کلرید موجود در بتن تمایل دارد تا به نقاط عمیق تر بتن که دارای غلظت کمتری از یون کلرید هستند، نفوذ نماید.یکی از پارامترهایی که می تواند میزان انتشار یون کلرید به درون بتن را توصیف نماید،ضریب انتشار یون کلرید میباشد که میتوان این ضریب را از پروفیل کلرید بدست آورد . با معلوم بودن این عامل، میتوان پیش بینی نمود که پس از چه زمانی غلظت یون کلرید در سطح آماتور به آستانه بحرانی می رسد و همچنین می توان مقدار پوشش بتنی مورد نیاز روی آماتور را تعیین نمود، به طوری که آماتور در طول عمر مفید سازه دچار خوردگی نشود.

## ۲. سازوکار نفوذ یون کلرید در بتن

به طور کلی از سه عامل اصلی عامل انتقال یون کلرید می توان نام برد:

۱- عامل محرک ناشی از اختلاف غلظت و توزیع یون های کلرید[1] که برای هر دو حالت بتن اشباع[2] و غیر اشباع[3] مهم می باشد.

۲- دومین عامل انتقال، رطوبت[4] است که برای حالت بتن غیر اشباع[3] مهم می باشد.

۳- سومین عامل انتقال، مهاجرت[5] بون های کلرید به علت اختلاف پتانسیل الکتریکی است که برای حالت های خاص مهم می باشد.[1]

آزمایش های نفوذ پذیری کلرید در AASHTO T277 , ASTM C1202 نشان دهنده اثر اولین و سومین عامل انتقال و آزمایش ASHTO T259-80 (تست غرقاب سازی ۹۰ روزه) شامل اثر اولین ودومین عامل محرک انتقال یون کلرید به بتن است. [1]

## ۳. تخمین ضریب پخش یون کلرید دربتن

[1] **Diffusion**
[2] **Saturated**
[3] **Non-Saturated**
[4] **moisture**
[5] **migration**

محاسبه ضریب پخش با استفاده از قانون دوم فیک مستلزم حل این معادله به صورت معکوس است ، به طوریکه با داشتن اطلاعات جمع آوری شده از میزان غلظت در عمق و زمان مشخص، ضریب پخش D محاسبه می شود.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \qquad (۶)$$

حل دقیق قانون دوم فیک تنها در شرایط حدی خاص از طرق معمول ریاضی امکان پذیر است. در شرایط مرزی زیر چنانچه مقدار اولیه غلظت یون کلرید در بتن برابر $Ci$ و غلظت یون کلرید در سطح بتن در زمان نفوذ برابر $C_s$ باشد :

$$C = C_i \quad : \quad t = 0 \quad , \quad 0 \le x \le \infty$$

$$C = C_s \quad : \quad t \ \mathbf{f}\ 0 \quad , \quad x = 0$$

از طریق حل قانون دوم فیک (معادله ۶ ) تحت شرایط حدی مورد نظر، توزیع غلظت ماده نفوذ کننده در طول قطعه نیمه نامحدود قابل محاسبه و ترسیم خواهد بود.بنابراین می توان با استفاده از روابط توابع خطا نوشت :

$$\frac{Cs - C}{Cs - Ci} = erf\left(\frac{X}{2\sqrt{Dt}}\right) \qquad (۷)$$

اطلاعات گرافیکی و جدولی در مورد تابع بدون بعد $erf$ بر حسب متغیر بدون $\frac{X}{2\sqrt{Dt}}$ موجود است. [2]

**. تخمین ضریب پخش با استفاده از توابع خطا- روش پولسن ( Poulsen )**

رابطه (۷) امکان محاسبه D را با در دست داشتن مقدار C در هر مکان و زمان فرضی فراهم می کند. روش پولسن امکان محاسبه مقدار تقریبی D را در هرگام زمانی، مستقل از مکان بدست می دهد. اروین پولسن با استفاده از معادله (۷)، روشی را برای محاسبه ضریب انتشار یون کلرید ارایه نموده است که در ذیل به شرح آن میپردازیم:

با استفاده از رابطه erfc(a)=1-erf(a) می توان معادله (۷) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$C(X,t) = C_i + (C_s - C_i)(1 - \frac{X}{\sqrt{4Dt}}) \qquad (۸)$$

$$C(X,t) = C_i + (C_s - C_i).erfc(\frac{X}{\sqrt{4Dt}}) \qquad (۹)$$

یک تقریب ساده از erfc(a) به صورت زیر است:

$$erfc(a) = (1 - \frac{a}{\sqrt{3}})^2 \qquad (۱۰)$$

که در بازه $0 \le a < \sqrt{3}$ معتبر است. برای مقادیر $a \ge \sqrt{3}$ ، تابع $erfc(a)$ برابر صفر تقریب زده می شود. با استفاده از این تقریب داریم:

$$0.1 \le \frac{X}{\sqrt{12Dt}} < 0.9 \qquad (۱۱)$$

که علت محدوده $\frac{X}{\sqrt{12Dt}} \geq 0.1$، غلظت نسبتا بیشتر کلرید در سطح بتن است که شاید دلیل آن این باشد که منافذ سطحی به طور نسبی پر از کلرید می باشد و محدوده $\frac{X}{\sqrt{12Dt}} < 0.9$ نیز بعلت محدوده اصلی $(a < \sqrt{3})$ است . جهت انجام بر ازش خطی، رابطه ۹ بایستی به صورت زیر مرتب گردد:

$$\sqrt{C(X,t)-C_i} = \sqrt{C_s - C_i} - X.\sqrt{\frac{C_s - C_i}{12D_t}} \qquad (۱۲)$$

بااعمال جایگزینی زیر:

$$Y = \sqrt{C(X,t)-C_i} \qquad (۱۳)$$

$$q = \sqrt{C_s - C_i} \qquad (۱۴)$$

$$a = -\sqrt{\frac{C_s - C_i}{12Dt}} = -\frac{q}{\sqrt{12Dt}} \qquad (۱۵)$$

می توان معادله۱۲ را به شکل فوق نوشت :

$$Y = aX + q \qquad (۱۶)$$

با استفاده از این معادله، می توان پارامترهای انتشار کلرید یعنی D,Cs,Ci رابااستفاده از پروفیل کلرید به صورت زیر به دست آورد؛ مقدارCi به عنوان مقدار میانگین حداقل ۲ قرائت نهایی پروفیل کلرید تعیین می گردد و تمام غلظت های کلرید اندازه گیری شده بایستی به متغیر جدید زیر تبدیل گردند:

$$Y = \sqrt{C(X,t)-Ci}$$

برای مقادیر XوY یک خط برازش می گردد. از خط برازش داده شده $Y = aX + q$، مقادیرa وq بدست می آید که با استفاده از آنها غلظت سطحیCs طبق فرمول روبرو بدست می آید :

$$Cs = q^2 + Ci \qquad (۱۷)$$

ضریب انتشار کلرید D نیز با استفاده از رابطه روبرو محاسبه می گردد:

$$D = \frac{(\frac{q}{a})^2}{12t}$$

پس از محاسبه D، محدوده $0.1 \leq \frac{X}{\sqrt{12Dt}} \leq 0.9$ بایبستی بر آورده گردد. در غیر این صورت نقاطی که این شرط را بر آورده نکنند. بایستی حذف گردند و مراحل فوق تکرار شوند.[3]

تاکنون روش های رایج حل قانون دوم فیک بیشتر بر اساس معادلات توابع خطا بوده است. هدف ما در این نوشتار بررسی و مقایسه روشهای مختلف بخصوص روشهایی غیر از توابع خطا , در محاسبه ضریب پخش یون کلر در بتن می باشد ؛ بطوریکه بتوانیم بر اساس آنها پروفیل غلظت یون کلراید را در بتن دقیقتر تخمین بزنیم . در این مقاله ما روشهای تابع خطا ( روشpoulsen.E ) , سریهای مثلثاتی و تفاضلهای محدود را مورد بررسی قرار داده و با یکدیگر مقایسه می کنیم.

## ۴. روشهای پیشنهادی

### ۴,۱. روش سریهای مثلثاتی

درحالت ناپایدار[1] ،جواب معادله پخش ( معادله (۷) ) ارائه شده باروش جداسازی متغیرها داریم:[2]

$$\begin{cases} C = C_{1,} & x = 0, t \geq 0 \\ C = C_2 & x = l, t \geq 0 \\ C = f(x) & 0 < X < l, t = 0 \end{cases}$$

$$C(x,t) = C_1 + (C_2 - C_1)\frac{X}{l} + \frac{2}{p}\sum_{1}^{\infty}\frac{C_2 Cos\ np - C_i}{n} Sin\ \frac{npx}{l}\exp(-Dn^2 p^2 t / l^2)$$

$$+ \frac{2}{l}\sum_{1}^{\infty} Sin\ \frac{npx}{l} exp(-Dp^2 n^2 t / l^2)\int_0^l f(x)' Sin\ \frac{npx'}{l} dx' \qquad (۱۸)$$

از آنجا که مقادیر کلرید در مکان و زمانهای مشخص با استفاده از آزمایش محاسبه گردیده لذا مقدار C(x,t) در این نقاط معلوم می باشد. بنابراین می توان با حل عددی رابطه فوق مقادیر D(x,t) تعیین می شودکه پس از محاسبه آن با میانگین گیری در هرگام زمانی یک مقدارD درآن گام زمانی محاسبه میگردد.

### ۴,۲. روش تفاضلهای محدود:

براساس بسط مشتق توابع دیفرانسیلی با استفاده از سری تیلور می باشد. جهت حل معادله پخش و یا قانون فیک روش مختلفی بر مبنای روش تفاضلهای محدود ارائه شده که از بهترین آنها از لحاظ مرتبه خطا، روش کرانک – نیکلسون است که از نوع ضمنی است و اردر خطای $0(\Delta t)^2$ و همواره پایدار است:

$$f_t\Big|_i n+\frac{1}{2} = f_{xx}\Big|_{i,} n+\frac{1}{2} \quad \rightarrow \qquad \frac{fi^{n+1} - fi^n}{Dt} = \frac{D_i^n}{2}\left(\frac{f_{i+1}^{n+1/2} - 2f_i^{n+1/2} + f_{i-1}^{n+1/2}}{Dx^2}\right)$$

با استفاده از میانگین $f^{n+1/2} = \frac{f^n + f^{n+1}}{2}$ در رابطه فوق وبا مرتب کردن رابطه گسسته سازی روش کرانک- نیکسون و تعریف $d = D\frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ داریم:

$$2(1+di)^n f_i^{n+1} - d_i^n f_{i-1}^{n+1} - d_i^n f_{i+1}^{n+1} = 2(1-d_i^n) f_i^n + d_i^n f_{i-1}^n + d_i^n f_{i+1}^n$$

مقادیر f همان میزان غلظت یا C می باشد که در نقاط i و n برای ما معلوم می باشد. بنابراین می بایست ضریب $d_i^n$ به عنوان مجهول از روابط بالا محاسبه شود. پس از مرتب سازی رابطه بالا ضریب $d_i^n$ بصورت صریح طبق رابطه زیر بدست می آید.

$$d_i^n = \frac{2(f_i^{n+1} - f_i^n)}{(-2f_i^n - 2f_i^{n+1} + f_i^{n+1} + 1 + fi+1^n + fi-1^n + f_i^{n+1} - 1)} \qquad (۱۹)$$

[1] **Non-steady**

## ۵. محاسبه و کاربرد روشها

### ۵,۱. اطلاعات آزمایشگاهی

در سال ۱۹۹۵ آقای Tumidagaski و همکاران آزمایشهایی را روی نمونه های بتن ۳و ۲۸ روزه با طرح اختلاط مشخص انجام دادند بطوریکه غلظت یون کلرید را را در این نمونه ها در مکان و سنین مختلف اندازه گیری نمودند. جدول زیر یکی از نتایج ارائه شده توسط ایشان می باشد که ما از آن به عنوان اطلاعات ورودی مدل ها استفاده می کنیم بمنظور استفاده از این اطلاعات بصورت ثابت در کلیه مدلها ما غلظت اولیه برابر ۰,۰۵% درنظر می گیریم و حداکثر عمق نمونه برداری را ۳۴ میلیمتر در نظر گرفتیم:[4]

| | C% | 2 | 8 | 14 | 20 | 26 | 32 | mm |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| غلظت اولیه | 0 | 0.05 | 0.05 | 0.05 | 0.05 | 0.05 | 0.05 | |
| | 3 | 0.6 | 0.49 | 0.28 | 0.15 | 0.08 | 0.06 | |
| | 6 | 1.07 | 0.61 | 0.43 | 0.28 | 0.15 | 0.11 | |
| | 12 | 1.43 | 0.72 | 0.46 | 0.21 | 0.19 | 0.1 | |
| | 18 | 1.17 | 0.73 | 0.57 | 0.42 | 0.27 | 0.12 | |
| | 24 | 1.2 | 0.83 | 0.59 | 0.45 | 0.43 | 0.32 | |
| | month | | | | | | | |

**جدول ۱**

### ۵,۲. تخمین ضرائب پخش:

پس از انجام محاسبات مطابق بخشهای گذشته، مقادیر **D** حاصل از نتایج روشها در جدول زیر آمده است:

| D (Cm2/sec) | erf | ts | fd-1 | fd-5 |
|---|---|---|---|---|
| t = 0.25 year | 1.08E-07 | 2.20E-07 | 1.69E-08 | 1.69E-08 |
| t = 0.5 year | 9.35E-08 | 5.12E-08 | 3.11E-07 | 4.74E-08 |
| t = 1.0 year | 4.42E-08 | 2.18E-08 | 4.76E-07 | 2.99E-08 |
| t = 1.5 year | 3.59E-08 | 2.91E-08 | 3.63E-07 | 6.03E-08 |
| t = 2 year | 6.19E-08 | 2.11E-08 | 1.25E-07 | -1.26E-08 |

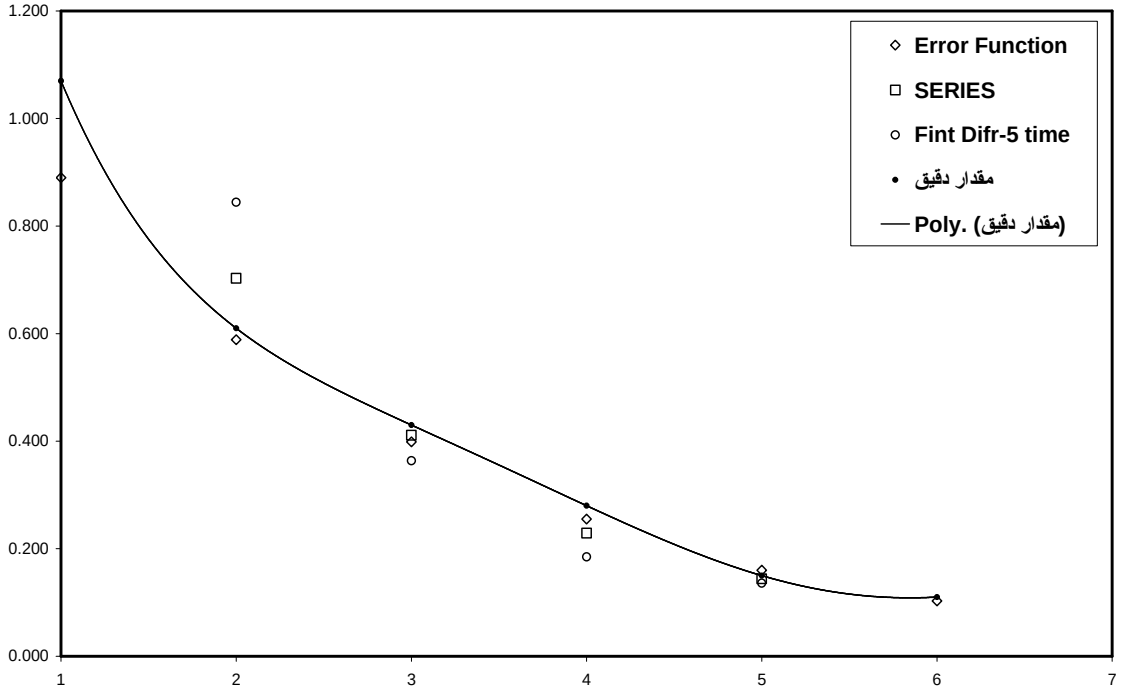
**جدول ۲**

*ضرایب پخش محاسبه شده با روشهای مختلف در زمان های مورد آزمایش تا ۲۴ ماه*

### ۵,۳. تخمین پروفیل یون کلرید:

بمنظور ارزیابی روشهای استفاده شده در این تحقیق ؛ پس از محاسبه مقدار D دربخش قبل با استفاده از این متدها ، مقادیر غلظت C با این مقادیر **D** محاسبه می شود که این مقادیر پروفیل کلر محاسبه شده را می توان با مقادیر دقیق پروفیل کلر بدست آمده از آزمایش، مقایسه و پراکندگی آنها را بررسی نمود. در شکل ۱ مقادیر تخمینی غلظت کلرید (C) با روشهای مختلف در یکی از گام های

زمانی رسم شده است. لازم به ذکر این نکته است که بعلت خطای زیاد fd-1 از رسم آن خودداری نموده ایم .




**شکل۱**

*نمودار پراکندگی نتایج روشها* *Time= 0/5 year*

## ۶. نتیجه گیری

در صفحه بعد (**جدول۳**) مقایسه پروفیل کلرید محاسبه شده با روشهای مختلف در زمان های مورد آزمایش تا ۲۴ ماه بصورت مجزا آورده شده که میزان خطای نرمالایزشده هر روش در هر زمان مورد آزمایش محاسبه و قابل مقایسه می باشد. رابطه خطای محاسبه شده برای هر روش به صورت ذیل می باشد:

مقدار دقیق = $C_i$ و مقدار تقریبی = $\overline{C_i}$

$$Error = \frac{\sqrt{\Sigma(C_i - \overline{C_i})^2}}{\sqrt{\Sigma C_i^{\,2}}}$$

- با توجه نتایج بدست آمده دراین بررسی، روش سریهای مثلثاتی دارای بهترین جوابها میباشند.
- با استفاده از روشهای استفاده شده دراین تحقیق و نتایج حاصله امکان حل معادله پخش در شرایط پیچیده تری هم به راحتی امکان پذیر است.
- با انجام کارهای پژوهشی بیشتر در مورد روشهای پیشنهادی امکان بهبود نتایج و نیز روشها را فراهم خواهد آورد.

| جدول مقایسه پرو فیل کلر محاسبه شده با روشهای مختلف | | | | | | | ERROR |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.968 | 0.761 | 0.616 | 0.485 | 0.373 | 0.282 | erf | *0.1494* |
| 1.2 | 0.90 | 0.65 | 0.47 | 0.37 | 0.32 | ts | *0.0668* |
| 1.2 | 1.76 | 1.32 | 1.00 | 0.76 | 0.32 | fd-1 | *0.7752* |
| 1.2 | 0.98 | 0.45 | 0.28 | 0.31 | 0.32 | fd-5 | *0.1715* |
| **1.2** | **0.83** | **0.59** | **0.45** | **0.44** | **0.32** | مقدار دقیق | ***t = 24 month*** |
| 1.136 | 0.771 | 0.536 | 0.352 | 0.221 | 0.140 | erf | *0.0680* |
| 1.17 | 0.86 | 0.59 | 0.38 | 0.23 | 0.12 | ts | *0.0908* |
| 1.17 | 1.76 | 1.31 | 0.90 | 0.54 | 0.12 | fd-1 | *0.8766* |
| 1.17 | 1.41 | 0.87 | 0.54 | 0.33 | 0.12 | fd-5 | *0.4772* |
| **1.17** | **0.73** | **0.57** | **0.42** | **0.27** | **0.12** | مقدار دقیق | ***t = 18 month*** |
| 0.997 | 0.648 | 0.431 | 0.269 | 0.163 | 0.103 | erf | *0.2627* |
| 1.43 | 0.89 | 0.48 | 0.24 | 0.13 | 0.1 | ts | *0.1088* |
| 1.43 | 2.13 | 1.55 | 1.04 | 0.58 | 0.1 | fd-1 | *1.1862* |
| 1.43 | 1.23 | 0.56 | 0.28 | 0.17 | 0.1 | fd-5 | *0.3120* |
| **1.43** | **0.72** | **0.46** | **0.21** | **0.19** | **0.1** | مقدار دقیق | ***t = 12 month*** |
| 0.890 | 0.589 | 0.399 | 0.255 | 0.160 | 0.103 | erf | *0.1381* |
| 1.07 | 0.70 | 0.41 | 0.23 | 0.14 | 0.11 | ts | *0.0801* |
| 1.07 | 1.42 | 0.96 | 0.62 | 0.37 | 0.11 | fd-1 | *0.7795* |
| 1.07 | 0.84 | 0.36 | 0.18 | 0.14 | 0.11 | fd-5 | *0.1944* |
| **1.07** | **0.61** | **0.43** | **0.28** | **0.15** | **0.11** | مقدار دقیق | ***t = 6 month*** |
| 0.809 | 0.461 | 0.266 | 0.146 | 0.086 | 0.060 | erf | *0.2510* |
| 0.6 | 0.46 | 0.33 | 0.23 | 0.14 | 0.06 | ts | *0.1327* |
| 0.6 | 0.20 | 0.07 | 0.05 | 0.05 | 0.06 | fd-1 | *0.4389* |
| 0.6 | 0.20 | 0.07 | 0.05 | 0.05 | 0.06 | fd-5 | *0.4389* |
| **0.6** | **0.49** | **0.28** | **0.15** | **0.08** | **0.06** | مقدار دقیق | ***t = 3 month*** |

**جدول ۳**

*مقایسه پروفیل کلرید محاسبه شده با روشهای مختلف در زمان های مورد آزمایش تا ۲۴ ماه*

***erf :*** **توابع خطا** ***ts :*** **سریهای مثلثاتی**

***fd-1 :*** **تفاضلهای محدود با پنج گام زمانی** ***fd-5 :*** **تفاضلهای محدود با یک گام زمانی**

## مراجع:


[1]. Ayman Ababneh; Farid Benboudjema; and Yunping Xi, ”Chloride Penetration in Nonsaturated Concrete”, Journal of Materialsin Civil Engineering, Vol. 15, No. 2, April 1, 2003.

[2]. J. Cranck, The mathematics of diffusion, 2d ed., Clarendon Press,Oxford, 1975.

[3]. Poulsen, E., "The Chloride Diffusion Characteristics of Concrete: Approximative Determination by Linear Regression Analysis", Holte Midtpunkt 23-3, DK-2840 Holte, Denmark.

[4]. Tumidijaski, P. J., Chan, Feldmen, R. F., and Strathdee, G., "A Boltzmann-Matano Analysis of Chloride Diffusion", Cement and Concrete Research, Vol. 25, No. 7,pp. 1556-1566, 1995